FCT/Unesp – Presidente Prudente
Departamento de Matemática e Computação

Recorrências e o Teorema Mestre

Prof. Danilo Medeiros Eler
danilo.eler@unesp.br

Apresentação adaptada (ver referências)

Departamento de Matemática e Computação
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Unesp – Universidade Estadual Paulista
Presidente Prudente/SP, Brasil

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

Qual a complexidade desse algoritmo?

```
Algoritmo Pesquisa(vetor)
  if vetor.size() ≤ 1 then
    inspecione elemento;
  else
    inspecione cada elemento recebido (vetor);
    Pesquisa(vetor.subLista(1, vetor.size() / 3));
  end if
end.
```

- vetor.subLista(x, y) retorna um novo vetor de tamanho y

Recorrência

- Quando um algoritmo contém **chamadas recursivas** seu tempo de execução pode freqüentemente ser descrito por uma **recorrência**

Recorrência

- Para os algoritmos recursivos, a ferramenta principal desta análise não é um somatório, mas um tipo especial de equação chamada **relação de recorrência**
- Uma recorrência é uma equação ou desigualdade que descreve uma função em termos de seu valor em entradas menores
- **Equação de recorrência**: maneira de definir uma função por uma expressão envolvendo a mesma função

Recorrência

- Para cada procedimento recursivo é associada uma função de complexidade ***T(n)*** desconhecida, onde ***n*** mede o tamanho dos argumentos para o procedimento

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

Recorrência

- Outro exemplo de recorrência
  - Considere o algoritmo “pouco formal”

```
Algoritmo Pesquisa(vetor)
   if vetor.size() ≤ 1 then
     inspecione elemento;
   else
      inspecione cada elemento recebido (vetor);
      Pesquisa(vetor.subLista(1, vetor.size() / 3));
   end if
end.
```

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \mathit{size} \le 1 \\ n + T(n/3), \; \mathit{caso\ contrário} \end{cases}$$

	L1 :	Algoritmo Pesquisa(vetor)
	L2 :	if $vetor.size() \le 1$ then
(1)	L3 :	*inspecione elemento*;
	L4 :	else
(n)	L5 :	inspecione cada elemento recebido (vetor);
Chamada recursiva	L6 :	Pesquisa($vetor.subLista(1, (vetor.size()/3))$);
	L7 :	end if
	L8 :	end.

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \textit{size} \leq 1 \\ n + T(n/3), \textit{caso contrário} \end{cases}$$

$$T(n) \qquad\qquad = n + T(n/3)$$

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \mathit{size} \le 1 \\ n + T(n/3), \; caso\, contrário \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= n + T(n/3) \\ T(n/3) &= n/3 + T(n/3/3) \end{aligned}$$

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, size \leq 1 \\ n + T(n/3), \ caso\,contrário \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= n + T(n/3) \\
T(n/3) &= n/3/3 + T(n/3/3) \\
T(n/3/3) &= n/3/3/3 + T(n/3/3/3) \\
T(n/3/3/3) &= n/3/3/3/3 + T(n/3/3/3/3)
\end{aligned}$$

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, size \leq 1 \\ n + T(n/3), \; caso\, contrário \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= n + T(n/3) \\
T(n/3) &= n/3/3 + T(n/3/3) \\
T(n/3/3) &= n/3/3/3 + T(n/3/3/3) \\
T(n/3/3/3) &= n/3/3/3/3 + T(n/3/3/3/3) \\
&\ldots \\
T(n/3/3\ldots/3) &= n/3/3/3\ldots/3 + T(n/3/3/3\ldots/3) \\
T(1) &= 1
\end{aligned}$$

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, size \le 1 \\ n + T(n/3), \; caso\,contrário \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= n + \cancel{T(n/3)} \\
\cancel{T(n/3)} &= n/3/3 + \cancel{T(n/3/3)} \\
\cancel{T(n/3/3)} &= n/3/3/3 + \cancel{T(n/3/3/3)} \\
\cancel{T(n/3/3/3)} &= n/3/3/3/3 + \cancel{T(n/3/3/3/3)} \\
\ldots & \\
\cancel{T(n/3/3...}/3) &= n/3/3/3.../3 + \cancel{T(n/3/3/3.../3)} \\
T(1) &= 1
\end{aligned}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + ... + n/3/3.../3/3 + 1$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \; se \;\; n \leq 1 \\ T(n/3) + n, \; caso \;\; contrário \end{cases}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + \ldots + n/3/3/3\ldots/3 + 1$$

A formula representa a soma de uma série geométrica de razão 1/3, multiplicada por n, e adicionada de T(n/3/3/3/3 $\cdots$ /3), que é menor ou igual a 1

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} \left(n \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{i} \right) + 1$$

Recorrência

$$T(n)=\begin{cases}1, \; se \;\; n\leq 1\\ T(n/3)+n, \; caso \;\; contrário\end{cases}$$

$$T(n)=n+n/3+n/3/3+\ldots+n/3/3/3\ldots/3+1$$

A formula representa a soma de uma série geométrica de razão 1/3, multiplicada por n, e adicionada de T(n/3/3/3/3 $\cdots$ /3), que é menor ou igual a 1

$$T(n)=\sum_{i=0}^{n}\left(n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\right)+1$$

$$T(n)=n\cdot\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}+1$$

Observação: **n** tende ao infinito

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \; se \;\; n \le 1 \\ T(n/3) + n, \; caso \;\; contrário \end{cases}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + \ldots + n/3/3/3\ldots/3 + 1$$

A formula representa a soma de uma série geométrica de razão 1/3, multiplicada por n, e adicionada de T(n/3/3/3/3 $\cdots$ /3), que é menor ou igual a 1

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} \left(n \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{i} \right) + 1$$

$$T(n) = n \cdot \cancel{\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{3} \right)^{i} + 1}$$

$\boxed{\text{COSTANTE}}$

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \; se \;\; n \le 1 \\ T(n/3) + n, \; caso \;\; contrário \end{cases}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + \ldots + n/3/3/3\ldots/3 + 1$$

A formula representa a soma de uma série geométrica de razão 1/3, multiplicada por n, e adicionada de T(n/3/3/3/3 $\cdots$ /3), que é menor ou igual a 1

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} \left(n \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{i} \right) + 1$$

$$T(n) = n \cdot \cancel{\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{3} \right)^{i} + 1}$$

COSTANTE

$$T(n) \in \Theta(n)$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

Recorrência

- Não é tão trivial encontrar a complexidade de tempo de algoritmos recursivos
- Métodos gerais para resolver recorrências
  - Método de Árvore de Recursão
  - Método de Substituição
  - Teorema Mestre

Teorema Mestre

Teorema Mestre

- Teorema Mestre
  - fornece um **“livro de receitas”** para resolver algumas equações de recorrência
- Resolve recorrências no formato

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

  - onde *a >= 1* e *b > 1* são constantes e *f(n)* é uma função assintoticamente positiva podem ser resolvidas usando o Teorema Mestre

Teorema Mestre

$$T(n) = \begin{cases} 1, \; size \le 1 \\ n + T(n/3), \; caso\ contrário \end{cases}$$

	L1 :	Algoritmo Pesquisa(vetor)
	L2 :	if $vetor.size() \le 1$ then
(1)	L3 :	*inspecione elemento*;
	L4 :	else
(n)	L5 :	inspecione cada elemento recebido (vetor);
Chamada recursiva	L6 :	Pesquisa($vetor.subLista(1, (vetor.size()/3)$);
	L7 :	end if
	L8 :	end.

Teorema Mestre

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

Se $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então

$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$

Teorema Mestre

$$T(n) = aT\left(n/b\right) + f(n)$$

Se $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ para alguma constante ε > 0, então

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$

Se $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ então

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

Teorema Mestre

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

Se $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ para alguma constante ε > 0, então

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$

Se $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ então

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

Se $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ para alguma constante ε > 0,

e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então

$$T(n) \in \Theta(f(n))$$

Teorema Mestre

- Exemplo 1

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

$$a =$$

$$b =$$

$$f(n) =$$

Teorema Mestre

- Exemplo 1

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

$$a = 9$$

$$b = 3$$

$$f(n) = n$$

- Em qual caso se encaixa?

unesp

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 9; b = 3; f(n) = n$$

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 9; b = 3; f(n) = n$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_b^a - \varepsilon}\right)$

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 9; b = 3; f(n) = n$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_b^a - \varepsilon}\right)$

$$n \in O\left(n^{log_3^9 - \varepsilon}\right)$$

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 9; b = 3; f(n) = n$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_b^a - \varepsilon}\right)$

$$n \in O\left(n^{log_3^9 - \varepsilon}\right)$$

$$n \in O(n^{2-\varepsilon})$$

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 9; b = 3; f(n) = n$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_b^a - \varepsilon}\right)$

$$n \in O\left(n^{log_3^9 - \varepsilon}\right)$$

$$n \in O(n^{2-\varepsilon})$$

$$n \leq cn^{2-\varepsilon};\ \varepsilon = 1$$

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 9; b = 3; f(n) = n$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_b^a - \varepsilon}\right)$

$$n \in O\left(n^{log_3^9 - \varepsilon}\right)$$

$$n \in O(n^{2-\varepsilon})$$

$$n \leq cn^{2-\varepsilon};\ \varepsilon = 1$$

$$n \leq cn^1$$

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 9; b = 3; f(n) = n$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_b^a - \varepsilon}\right)$

$$n \in O\left(n^{log_3^9 - \varepsilon}\right)$$

$$n \in O(n^{2-\varepsilon})$$

$$n \leq cn^{2-\varepsilon};\ \varepsilon = 1$$

$$n \leq cn^1$$

VERDADEIRO

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 9; b = 3; f(n) = n$$

Aplicando o Teorema

$$T(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$$

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 9; b = 3; f(n) = n$$

Aplicando o Teorema

$$T(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$$

$$T(n) \in \theta\left(n^{log_3^9}\right)$$

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 9; b = 3; f(n) = n$$

Aplicando o Teorema

$$T(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$$

$$T(n) \in \theta\left(n^{log_3^9}\right)$$

$$T(n) \in \theta(n^2)$$

Teorema Mestre

- Exemplo 2

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$$

$$a =$$

$$b =$$

$$f(n) =$$

Teorema Mestre

- Exemplo 2

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$$

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$f(n) = \sqrt{n}$$

Aplicando o caso 1 do teorema mestre:

– Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_b^a - \varepsilon}\right)$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_b^a - \varepsilon}\right)$

$$\sqrt{n} \in O\left(n^{log_4^2 - \varepsilon}\right)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_b^a - \varepsilon}\right)$

$$\sqrt{n} \in O\left(n^{log_4^2 - \varepsilon}\right)$$

$$\sqrt{n} \in O(n^{0.5 - \varepsilon})$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_b^a - \varepsilon}\right)$

$$\sqrt{n} \in O\left(n^{log_4^2 - \varepsilon}\right)$$

$$\sqrt{n} \in O(n^{0.5 - \varepsilon})$$

$$\sqrt{n} \leq cn^{0.5 - \varepsilon};\ \varepsilon = 0.1$$

unesp

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_b^a - \varepsilon}\right)$

$$\sqrt{n} \in O\left(n^{log_4^2 - \varepsilon}\right)$$

$$\sqrt{n} \in O(n^{0.5-\varepsilon})$$

$$\sqrt{n} \leq cn^{0.5-\varepsilon};\ \varepsilon = 0.1$$

$$\sqrt{n} \leq cn^{0.4}$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_b^a - \varepsilon}\right)$

$$\sqrt{n} \in O\left(n^{log_4^2 - \varepsilon}\right)$$

$$\sqrt{n} \in O(n^{0.5-\varepsilon})$$

$$\sqrt{n} \leq cn^{0.5-\varepsilon};\ \varepsilon = 0.1$$

$$\sqrt{n} \leq cn^{0.4}$$

$$n^{0.5} \leq cn^{0.4}$$

unesp

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_b^a - \varepsilon}\right)$

$$\sqrt{n} \in O\left(n^{log_4^2 - \varepsilon}\right)$$

$$\sqrt{n} \in O(n^{0.5-\varepsilon})$$

$$\sqrt{n} \leq cn^{0.5-\varepsilon};\ \varepsilon = 0.1$$

$$\sqrt{n} \leq cn^{0.4}$$

$$n^{0.5} \leq cn^{0.4}$$

FALSO

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$\sqrt{n} \in \theta\left(n^{log_4^2}\right)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$\sqrt{n} \in \theta\left(n^{log_4^2}\right)$$

$$\sqrt{n} \in \theta(n^{0.5})$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$\sqrt{n} \in \theta\left(n^{log_4^2}\right)$$

$$\sqrt{n} \in \theta(n^{0.5})$$

$$c1n^{0.5} \leq \sqrt{n} \leq c2n^{0.5}$$

unesp

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$\sqrt{n} \in \theta\left(n^{log_4^2}\right)$$

$$\sqrt{n} \in \theta(n^{0.5})$$

$$c1n^{0.5} \leq \sqrt{n} \leq c2n^{0.5}$$

$$c_1n^{0.5} \leq n^{0.5} \leq c_2n^{0.5}; c_1 = c_2 = 1$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$\sqrt{n} \in \theta\left(n^{log_4^2}\right)$$

$$\sqrt{n} \in \theta(n^{0.5})$$

$$c1n^{0.5} \leq \sqrt{n} \leq c2n^{0.5}$$

$$c_1 n^{0.5} \leq n^{0.5} \leq c_2 n^{0.5}; c_1 = c_2 = 1$$

$$n^{0.5} \leq n^{0.5} \leq n^{0.5}$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$\sqrt{n} \in \theta\left(n^{log_4^2}\right)$$

$$\sqrt{n} \in \theta(n^{0.5})$$

$$c1n^{0.5} \leq \sqrt{n} \leq c2n^{0.5}$$

$$c_1 n^{0.5} \leq n^{0.5} \leq c_2 n^{0.5}; c_1 = c_2 = 1$$

$$n^{0.5} \leq n^{0.5} \leq n^{0.5}$$

VERDADEIRO

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

$$2º\ Caso\text{: } f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$$

$$T(n) \in \theta\left(n^{log_b^a} logn\right)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

$$2º\ Caso\!: f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$$

$$T(n) \in \theta\left(n^{log_b^a} logn\right)$$

$$T(n) \in \theta\left(n^{log_4^2} logn\right)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$T(n) \in \theta\left(n^{log_b^a} logn\right)$$

$$T(n) \in \theta\left(n^{log_4^2} logn\right)$$

$$T(n) \in \theta(n^{0.5} logn)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$a = 2; b = 4; f(n) = \sqrt{n}$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$T(n) \in \theta\left(n^{log_b^a} logn\right)$$

$$T(n) \in \theta\left(n^{log_4^2} logn\right)$$

$$T(n) \in \theta(n^{0.5} logn)$$

ou

$$T(n) \in \theta(\sqrt{n}\, logn)$$

Teorema Mestre

- Exemplo 3

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T(n) = 3T(n/4) + n \log n$$

$$a =$$

$$b =$$

$$f(n) =$$

unesp

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_4^3 - \varepsilon}\right)$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_4^3 - \varepsilon}\right)$

$$nlogn \in O\left(n^{log_4^3 - \varepsilon}\right)$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_4^3 - \varepsilon}\right)$

$$nlogn \in O\left(n^{log_4^3 - \varepsilon}\right)$$

$$nlogn \in O(n^{0.79 - \varepsilon})$$

unesp

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_4^3 - \varepsilon}\right)$

$$nlogn \in O\left(n^{log_4^3 - \varepsilon}\right)$$

$$nlogn \in O(n^{0.79-\varepsilon})$$

$$nlogn \leq cn^{0.79-\varepsilon};\ \varepsilon = 0.01$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_4^3 - \varepsilon}\right)$

$$nlogn \in O\left(n^{log_4^3 - \varepsilon}\right)$$

$$nlogn \in O(n^{0.79 - \varepsilon})$$

$$nlogn \leq cn^{0.79 - \varepsilon};\ \varepsilon = 0.01$$

$$nlogn \leq cn^{0.78}$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

1º Caso: $f(n) \in O\left(n^{log_4^3 - \varepsilon}\right)$

$$nlogn \in O\left(n^{log_4^3 - \varepsilon}\right)$$

$$nlogn \in O(n^{0.79-\varepsilon})$$

$$nlogn \leq cn^{0.79-\varepsilon};\ \varepsilon = 0.01$$

$$nlogn \leq cn^{0.78}$$

FALSO

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$nlogn \in \theta\left(n^{log_4^3}\right)$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$nlogn \in \theta\left(n^{log_4^3}\right)$$

$$nlogn \in \theta(n^{0.79})$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$nlogn \in \theta\left(n^{log_4^3}\right)$$

$$nlogn \in \theta(n^{0.79})$$

$$c_1 n^{0.79} \leq nlogn \leq c_2 n^{0.79}$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$nlogn \in \theta\left(n^{log_4^3}\right)$$

$$nlogn \in \theta(n^{0.79})$$

$$c_1 n^{0.79} \leq nlogn \leq c_2 n^{0.79}$$

$$c_1 n^{0.79} \leq nlogn\ (verdadeiro)$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$nlogn \in \theta\left(n^{log_4^3}\right)$$

$$nlogn \in \theta(n^{0.79})$$

$$c_1 n^{0.79} \leq nlogn \leq c_2 n^{0.79}$$

$$c_1 n^{0.79} \leq nlogn \ (verdadeiro)$$

$$nlogn \leq c_2 n^{0.79} \ (falso)$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

2º Caso: $f(n) \in \theta\left(n^{log_b^a}\right)$

$$nlogn \in \theta\left(n^{log_4^3}\right)$$

$$nlogn \in \theta(n^{0.79})$$

$$c_1 n^{0.79} \leq nlogn \leq c_2 n^{0.79}$$

$$c_1 n^{0.79} \leq nlogn\ (verdadeiro)$$

$$nlogn \leq c_2 n^{0.79}\ (falso)$$

$$FALSO$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

3º Caso: $f(n) \in \Omega\left(n^{log_b^a+\varepsilon}\right)$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

3º Caso: $f(n) \in \Omega\left(n^{log_b^a + \varepsilon}\right)$

$$nlogn \in \Omega\left(n^{log_4^3 + \varepsilon}\right)$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

3º Caso: $f(n) \in \Omega\left(n^{log_b^a + \varepsilon}\right)$

$$nlogn \in \Omega\left(n^{log_4^3 + \varepsilon}\right)$$

$$nlogn \in \Omega(n^{0.79+\varepsilon})$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

3º Caso: $f(n) \in \Omega\left(n^{log_b^a + \varepsilon}\right)$

$$nlogn \in \Omega\left(n^{log_4^3 + \varepsilon}\right)$$

$$nlogn \in \Omega(n^{0.79+\varepsilon})$$

$$nlogn \geq cn^{0.79+\varepsilon}\ ;\ \varepsilon = 0.21$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

3º Caso: $f(n) \in \Omega\left(n^{log_b^a+\varepsilon}\right)$

$$nlogn \in \Omega\left(n^{log_4^3+\varepsilon}\right)$$

$$nlogn \in \Omega(n^{0.79+\varepsilon})$$

$$nlogn \geq cn^{0.79+\varepsilon}\ ;\ \varepsilon = 0.21$$

$$nlogn \geq cn^{0.79+0.21}$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

3º Caso: $f(n) \in \Omega\left(n^{log_b^a + \varepsilon}\right)$

$$nlogn \in \Omega\left(n^{log_4^3 + \varepsilon}\right)$$

$$nlogn \in \Omega(n^{0.79+\varepsilon})$$

$$nlogn \geq cn^{0.79+\varepsilon}\ ;\ \varepsilon = 0.21$$

$$nlogn \geq cn^{0.79+0.21}$$

$$nlogn \geq cn^{1}$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

3º Caso: $f(n) \in \Omega\left(n^{log_b^a + \varepsilon}\right)$

$$nlogn \in \Omega\left(n^{log_4^3 + \varepsilon}\right)$$

$$nlogn \in \Omega(n^{0.79+\varepsilon})$$

$$nlogn \geq cn^{0.79+\varepsilon}\ ;\ \varepsilon = 0.21$$

$$nlogn \geq cn^{0.79+0.21}$$

$$nlogn \geq cn^1$$

$$logn \geq c$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

3º Caso: $f(n) \in \Omega\left(n^{log_b^a + \varepsilon}\right)$

$$nlogn \in \Omega\left(n^{log_4^3 + \varepsilon}\right)$$

$$nlogn \in \Omega(n^{0.79+\varepsilon})$$

$$nlogn \geq cn^{0.79+\varepsilon} \ ; \ \varepsilon = 0.21$$

$$nlogn \geq cn^{0.79+0.21}$$

$$nlogn \geq cn^{1}$$

$logn \geq c$ VERDADEIRO

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$$

$$3f\left(\frac{n}{4}\right) \leq cf(n)$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$$

$$3f\left(\frac{n}{4}\right) \leq cf(n)$$

$$3\frac{n}{4}log\left(\frac{n}{4}\right) \leq c\ nlogn$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$$

$$3f\left(\frac{n}{4}\right) \leq cf(n)$$

$$3\frac{n}{4}log\left(\frac{n}{4}\right) \leq c\ nlogn$$

$$3\frac{n}{4}(logn - log4) \leq c\ nlogn$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$$

$$3f\left(\frac{n}{4}\right) \leq cf(n)$$

$$3\frac{n}{4}log\left(\frac{n}{4}\right) \leq c\ nlogn$$

$$3\frac{n}{4}(logn - log4) \leq c\ nlogn$$

$$3\frac{n}{4}(logn - 2) \leq c\ nlogn\ ; c = \frac{3}{4}$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$$

$$3f\left(\frac{n}{4}\right) \leq cf(n)$$

$$3\frac{n}{4}log\left(\frac{n}{4}\right) \leq c\,nlogn$$

$$3\frac{n}{4}(logn - log4) \leq c\,nlogn$$

$$3\frac{n}{4}(logn - 2) \leq c\,nlogn\,; c = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3n}{4}(logn - 2) \leq \frac{3n}{4}logn$$

unesp

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n)$$

$$3f\left(\frac{n}{4}\right) \le cf(n)$$

$$3\frac{n}{4}log\left(\frac{n}{4}\right) \le c\,nlogn$$

$$3\frac{n}{4}(logn - log4) \le c\,nlogn$$

$$3\frac{n}{4}(logn - 2) \le c\,nlogn\,; c = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3n}{4}(logn - 2) \le \frac{3n}{4}logn$$

$$logn - 2 \le logn$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$$

$$3f\left(\frac{n}{4}\right) \leq cf(n)$$

$$3\frac{n}{4}log\left(\frac{n}{4}\right) \leq c\,nlogn$$

$$3\frac{n}{4}(logn - log4) \leq c\,nlogn$$

$$3\frac{n}{4}(logn - 2) \leq c\,nlogn\,; c = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3n}{4}(logn - 2) \leq \frac{3n}{4}logn$$

$$logn - 2 \leq logn \qquad VERDADEIRO$$

unesp

DMC DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

$$T(n) \in \theta(f(n))$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$$

$$a = 3; b = 4; f(n) = nlogn$$

$$T(n) \in \theta(f(n))$$

$$T(n) \in \theta(nlogn)$$

Exercícios

- Aplicar o Teorema Mestre no algoritmo apresentado abaixo

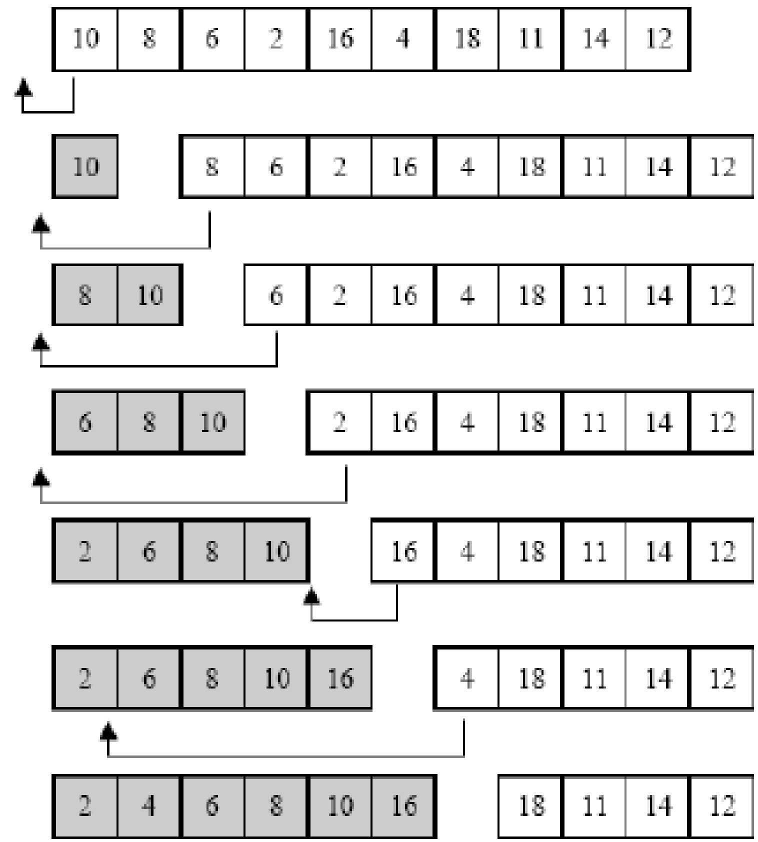
	Algoritmo Pesquisa(vetor)
$\Theta(1)$	if $vetor.size() \leq 1$ then
$\Theta(1)$	*inspecione elemento*;
	else
$\Theta(n)$	inspecione cada elemento recebido (vetor);
Chamada recursiva	Pesquisa($vetor.subLista(1,\ vetor.size()/3)$);
	end if
	end.

- Fazer a lista de exercícios da Aula 04

Recorrência

- Considerando o algoritmo de ordenação por inserção

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1)+1 \\
T(n-1) &= T(n-2)+2 \\
T(n-2) &= T(n-3)+3 \\
T(n-3) &= T(n-4)+4 \\
&\ldots \\
T(2) &= T(1)+n-2 \\
T(1) &= n-1
\end{aligned}
$$



Recorrência

- Qual é a complexidade computacional de um algoritmo que possui a seguinte relação de recorrência?

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1)+1 \\
T(n-1) &= T(n-2)+2 \\
T(n-2) &= T(n-3)+3 \\
T(n-3) &= T(n-4)+4 \\
&\ldots \\
T(2) &= T(1)+n-2 \\
T(1) &= n-1
\end{aligned}
$$

Recorrência

- Qual é a complexidade computacional de um algoritmo que possui a seguinte relação de recorrência?

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1)+1 \\
T(n-1) &= T(n-2)+2 \\
T(n-2) &= T(n-3)+3 \\
T(n-3) &= T(n-4)+4 \\
&\ldots \\
T(2) &= T(1)+n-2 \\
T(1) &= n-1
\end{aligned}
$$

$$T(n) = 1+2+3+4+\ldots+(n-2)+(n-1)$$

Recorrência

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i$$

Recorrência

$$\sum_{i=1}^{n} i = \underline{1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)}+n$$

$$T(n) = 1+2+3+4+\ldots+(n-2)+(n-1)$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i$$

Recorrência

$$\sum_{i=1}^{n} i = \underline{1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)} + \cancel{n}$$

$$T(n) = 1+2+3+4+\ldots+(n-2)+(n-1)$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i$$

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) - n}$$

Recorrência

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) - n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - n$$

Recorrência

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) - n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - n$$

$$T(n) = \frac{n^2 + n}{2} - n = \frac{n^2 + n - 2n}{2}$$

$$T(n) = \frac{n^2 - n}{2}$$

Recorrência

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) - n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - n$$

$$T(n) = \frac{n^2 + n}{2} - n = \frac{n^2 + n - 2n}{2}$$

$$T(n) = \frac{n^2 - \cancel{n}}{\cancel{2}} \qquad T(n) \in \Theta(n^2)$$

Referências de Material

- Adaptado do material de
  - Professor Alessandro L. Koerich da *Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR)*
  - Professor Humberto Brandão da *Universidade Federal de Alfenas (Unifal-MG)*
  - Professor Ricardo Linden da *Faculdade Salesiana Maria Auxiliadora (FSMA)*
  - Professor Antonio Alfredo Ferreira Loureiro da *Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)*

Referências Bibliográficas

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos –Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus
- TAMASSIA, ROBERTO; GOODRICH, MICHAEL T. (2004). Projeto de Algoritmos -Fundamentos, Análise e Exemplos da Internet
- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson
- Serie Geometrica
  - http://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_(matem%C3%A1tica)
- Calculadora Científica Online
  - http://www.calculadoraonline.com.br/cientifica

Outra maneira de resolver o exemplo

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \; se \;\; n \leq 1 \\ T(n/3) + n, \; caso \;\; contrário \end{cases}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + \ldots + n/3/3/3\ldots/3 + 1$$

A formula representa a soma de uma série geométrica de razão 1/3, multiplicada por n, e adicionada de T(n/3/3/3/3 $\cdots$ /3), que é menor ou igual a 1

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} \left(n \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{i} \right) + 1$$

$$T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{3} \right)^{i} + 1$$

$$\boxed{T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{i} + 1}$$

Observação: **n** tende ao infinito

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \; se\, n \leq 1 \\ T(n/3) + n, \; caso\, contrário \end{cases}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + \ldots + n/3/3/3\ldots/3 + 1$$

$$T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} + 1$$

Recorrência

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$T(n) = \begin{cases} 1, & se\, n \leq 1 \\ T(n/3) + n, & caso\ contrario \end{cases}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + \ldots + n/3/3/3\ldots/3 + 1$$

$$T(n) = n \cdot \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i} + 1$$

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \; se\, n \le 1 \\ T(n/3) + n, \; caso\, contrário \end{cases}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + \ldots + n/3/3/3\ldots/3 + 1$$

$$T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} + 1 \rightarrow usando: \sum_{k=0}^{\infty} x^{k} = \frac{1}{1-x}$$

$$T(n) = n\left(\frac{1}{1-1/3}\right) + 1 = \frac{3n}{2} + 1$$

Recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1, \; se\, n \leq 1 \\ T(n/3) + n, \; caso\, contrário \end{cases}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + \ldots + n/3/3/3\ldots/3 + 1$$

$$T(n) = n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} + 1 \rightarrow usando: \sum_{k=0}^{\infty} x^{k} = \frac{1}{1-x}$$

$$T(n) = n\left(\frac{1}{1-1/3}\right) + 1 = \frac{\cancel{3}n}{\cancel{2}} + \cancel{1}$$

$$T(n) \in \Theta(n)$$