FCT/Unesp – Presidente Prudente
Departamento de Matemática e Computação

Notação Assintótica
Parte II

Prof. Danilo Medeiros Eler
danilo.eler@unesp.br

Apresentação adaptada (ver referências)

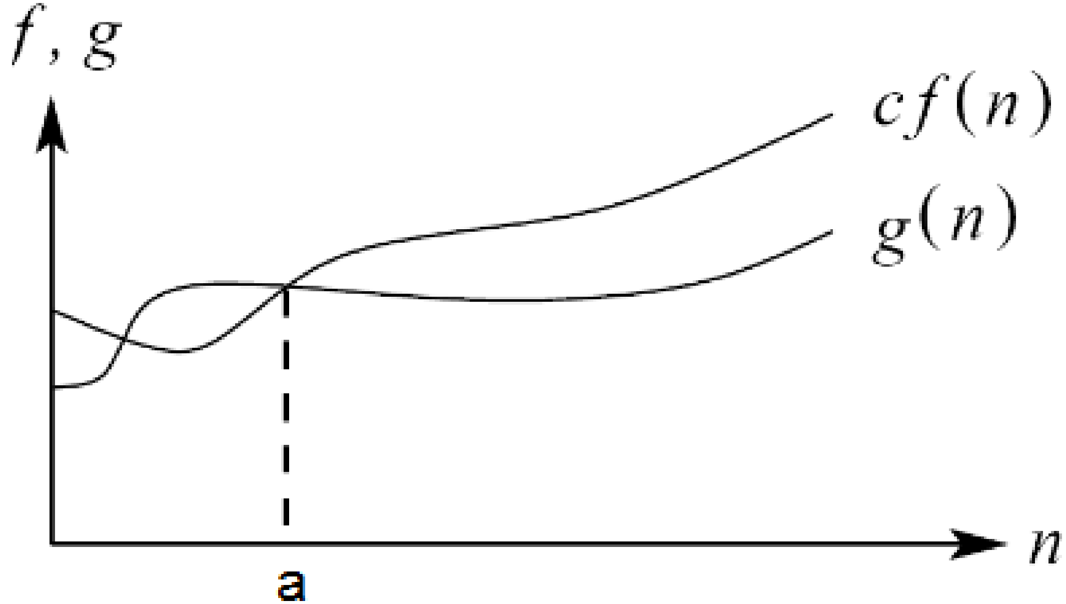
Departamento de Matemática e Computação
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Unesp – Universidade Estadual Paulista
Presidente Prudente/SP, Brasil

Notação Assintótica

Escrevemos $g(n) = O(f(n))$ ou $g(n) \in O(f(n))$ para expressar que $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$.

Se existirem duas constantes positivas a e c tais que, para qualquer *n* >= *a*,

temos
g*(n)* <= *c* . *f(n)*



Notação Assintótica

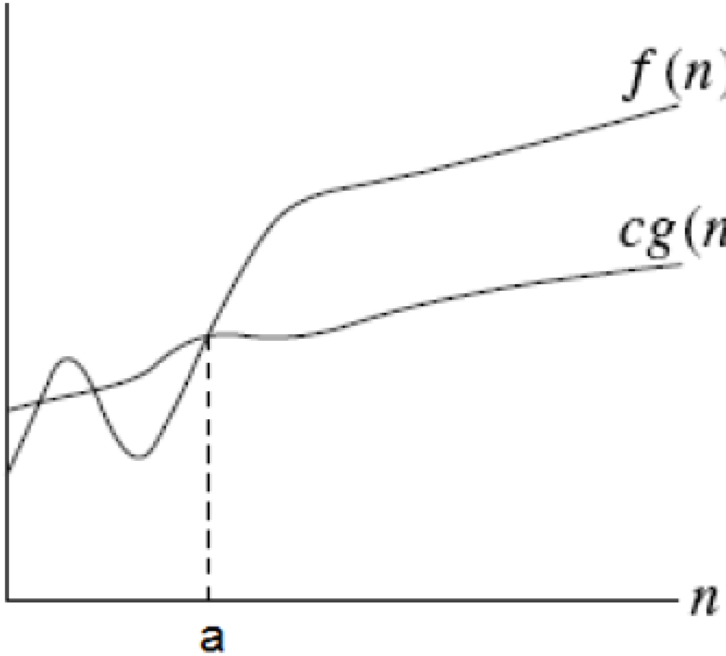
- Assim como a notação *O* fornece uma maneira assintótica de dizer que uma função é “menor ou igual a” outra, existem outras notação que fornecem outras conclusões
  - Θ
  - Ω
  - ω
  - o

Notação Ω

- A notação Ω é bem parecida com a notação O
  - O define um limite assintótico superior
  - Ω define um limite assintótico inferior

Notação Ω

- Limite Assintótico Inferior



$$\Omega(g(n)) = \{f(n):\ \exists\ c \text{ e } \mathsf{a} > 0$$
$$\mid 0 \le c \cdot g(n) \le f(n) \quad \forall \quad n \ge \mathsf{a}\ \}$$

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

Notação Ω

- A notação Ω é bem parecida com a notação O
  - O define um limite assintótico superior
  - Ω define um limite assintótico inferior
  - Exemplos:

$$n^4 >= c\ n^3$$

$$n^4 \in \Omega(n^3)$$

$$n \in \Omega(1)$$

$$3 \cdot \log(n) \in \Omega(\log(n))$$

$$1 \in \Omega(1)$$

$$n! \in \Omega(2^n)$$

unesp

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

Notação Ω

- A notação Ω é bem parecida com a notação O
  - O define um limite assintótico superior
  - Ω define um limite assintótico inferior
  - Exemplos:

$$n >= c\ 1$$

$$n^4 \in \Omega(n^3)$$

$$n \in \Omega(1)$$

$$3 \cdot \log(n) \in \Omega(\log(n))$$

$$1 \in \Omega(1)$$

$$n! \in \Omega(2^n)$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

Notação Ω

- A notação Ω é bem parecida com a notação O
  - O define um limite assintótico superior
  - Ω define um limite assintótico inferior
  - Exemplos:

$$n^4 \in \Omega(n^3)$$

$$n \in \Omega(1)$$

$$3 \cdot \log(n) \in \Omega(\log(n))$$

$$3\log(n) >= c\log(n)$$

$$1 \in \Omega(1)$$

$$n! \in \Omega(2^n)$$

Notação Ω

- Na prática a notação Ω não é vista sozinha em análises de algoritmos
  - Pelo motivo de não interessar para a análise de algoritmos
  - A notação O possui sua importância
    - Pois o programador conclui que seu algoritmo é no máximo tão complexo a uma função
    - Mas no mínimo tão complexo, como a notação Ω descreve

Notação θ

- Conhecida também como "limite firme" ou "limite assintoticamente restrito"
- A notação O nem sempre é precisa
  - Apesar de fornecer informações sobre a complexidade do algoritmo

Notação θ

- Exemplos da falta de precisão de O

$$n \in O(n^3)$$

$$n \in O(n^4)$$

$$n \in O(n^5)$$

$$n \in O(n^{1000})$$

$$n \in O(2^n)$$

$$n \in O(n!)$$

Notação θ

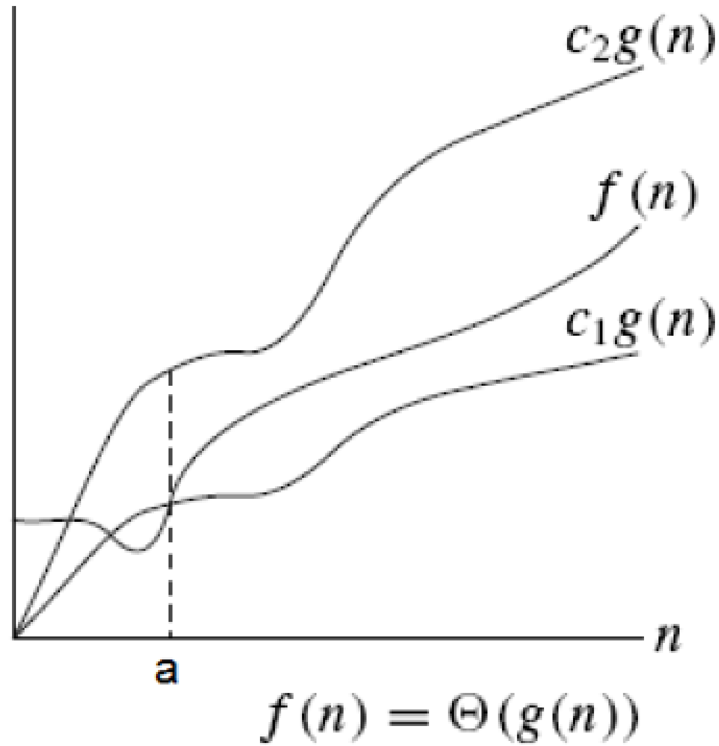
- Uma função ***f(n)*** pertence ao conjunto ***θ(g(n))***
  - Se existem constantes positivas *a*, *c1* e *c2* tais que
  - Ela possa ser "**prensada**" entre ***c1.g(n)*** e ***c2.g(n)***
    - Para um valor de ***n*** suficientemente grande

$$f(n) = \theta(g(n))$$

$$0 \le c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n) \quad \forall \quad n \ge \mathbf{a}$$

Notação θ

- Uma função ***f(n)*** pertence ao conjunto ***θ(g(n))***

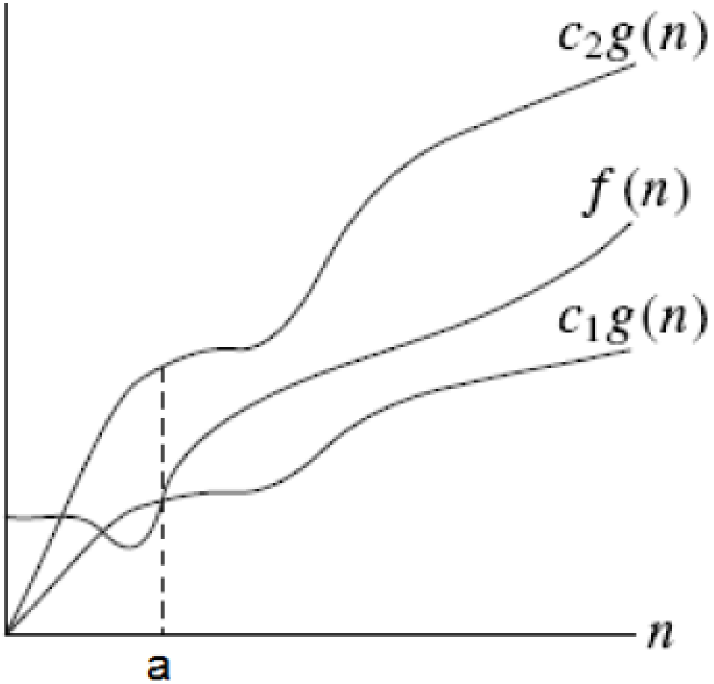


$$\Theta(g(n)) = \{f(n):\ \exists\ c_1, c_2\ e\ \mathsf{a} > 0$$
$$\mid 0 \le c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n)\quad \forall\quad n \ge \mathsf{a}\ \}$$

Notação θ

- O que podemos concluir sobre ***f(n)*** é ***θ(g(n))***?

$$\boxed{\begin{array}{l} f(n) \in \Theta(g(n)) \\ sse \\ f(n) \in O(g(n)) \\ e \\ f(n) \in \Omega(g(n)) \end{array}}$$



$f(n) = \Theta(g(n))$

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \exists\ c_1, c_2\ e\ \mathrm{a} > 0 \mid 0 \le c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n) \quad \forall \quad n \ge \mathrm{a}\ \}$$

Notação θ

- Exemplo
  - Verificar se $\frac{n^2}{2} \in \Theta(n^2)$
  - Para isso, devemos definir constantes $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$ e **a** tais que

$$c_1 n^2 \le \frac{1}{2} n^2 \le c_2 n^2$$

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \ \exists\ c_1, c_2\ e\ \mathbf{a} > 0$$

$$\mid 0 \le c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n) \quad \forall \quad n \ge \mathbf{a}\ \}$$

unesp

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

Notação *o*

- O limite assintótico superior fornecido pela notação O (ó-zão) pode:
  - Ser assintoticamente restrito
  - Não ser assintoticamente restrito
  - Exemplos:

    - Assintoticamente restrito: $2 \cdot n^2 \in O(n^2)$

    - Não assintoticamente restrito: $2n \in O(n^2)$

      $\log(n) \in O(c^n)$

Notação *o*

- Todas as funções de O (ó-zão) que não definem um limite assintoticamente restrito pertencem a "o" (ó-zinho)

$$se\ f(n) \in O(g(n))\, e\, f(n) \notin \Omega(g(n))\, entao$$

$$f(n) \in o(g(n))$$

- Exemplos:

$$2n \in o(n^2)$$

$$\log(n) \in o(n)$$

Notação *o*

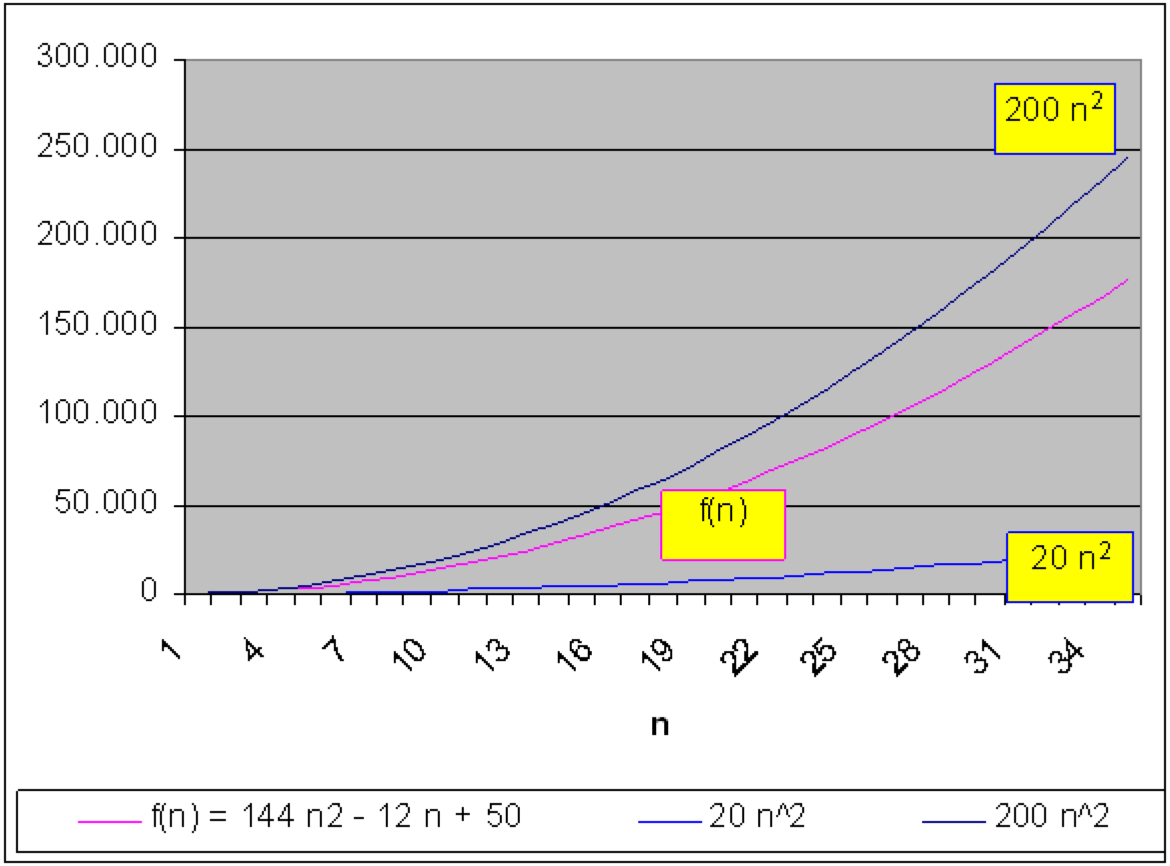
- Todas as funções de O (ó-zão) que não definem um limite assintoticamente restrito pertencem a "o" (ó-zinho)
  - Para um *n* suficientemente grande

$$o(g(n)) = \{f(n):\ \forall c > 0,\ \exists\ \mathrm{a} > 0$$

$$|\ 0 \leq f(n) < c \cdot g(n)\quad \forall\ \ n \geq \mathrm{a}\}$$

Notação Assintótica

$f(n) = 144\, n^2 - 12\, n + 50$ é $O(n^2)$?



Notação *o*

- Comparativo com a notação O

$$f(n) \in O(g(n)), \text{ o limite } 0 \le f(n) \le cg(n) \text{ se mantém válido}$$
$$\text{para alguma constante c} > 0$$
$$f(n) \in o(g(n)), \text{ o limite } 0 \le f(n) < cg(n) \text{ é válido}$$
$$\text{para todas as constantes c} > 0$$

- Não é <= é somente <

$$o(g(n)) = \{f(n): \ \forall c > 0, \exists \ \text{a} > 0$$
$$\mid 0 \le f(n) < c \cdot g(n) \ \ \forall \ \ n \ge \text{a}\}$$

unesp

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO

Notação *o*

- Em outras palavras:

$$\text{Se } f(n) \in o(g(n)) \text{ então}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

- Exemplo: n = o(n^2)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

Notação ω

- O limite assintótico inferior fornecido pela notação Ω (omegazão) pode
  - Ser assintoticamente restrito
  - Não ser assintoticamente restrito
  - Exemplos:

Assintoticamente restrito: $2 \cdot n^2 \in \Omega(n^2)$

Não assintoticamente restrito: $2 \cdot n^3 \in \Omega(n)$

Notação ω

- Todas as funções de Ω (omegazão) que não definem um limite assintoticamente restrito pertencem a ω

$$se \ \ f(n) \notin O(g(n)) \, e \, f(n) \in \Omega(g(n)) \, entao$$

$$f(n) \in \omega(g(n))$$

- Exemplos:

$$2n^2 \in \omega(1)$$

$$2n \in \omega(\log(n))$$

Notação ω

- Comparando com a notação Ω

$$\omega(g(n)) = \{f(n): \ \forall c > 0, \exists\, a > 0$$

$$\mid 0 \le c \cdot g(n) < f(n) \quad \forall \ n \ge a\}$$

Não é <=, é somente <

Notação ω

- Em outras palavras

$$\text{Se } f(n) \in \omega(g(n)) \text{ então}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

- Exemplo: $n^2 = \omega(n)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n} = \infty$$

Referências de Material

- Adaptado do material de
  - Professor Alessandro L. Koerich da *Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR)*
  - Professor Humberto Brandão da *Universidade Federal de Alfenas (Unifal-MG)*
  - Professor Ricardo Linden da *Faculdade Salesiana Maria Auxiliadora (FSMA)*
  - Professor Antonio Alfredo Ferreira Loureiro da *Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)*

Referências Bibliográficas

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos –Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus
- TAMASSIA, ROBERTO; GOODRICH, MICHAEL T. (2004). Projeto de Algoritmos -Fundamentos, Análise e Exemplos da Internet
- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson
- Serie Geometrica
  - http://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_(matem%C3%A1tica)
- Calculadora Científica Online
  - http://www.calculadoraonline.com.br/cientifica